

**KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM
MENADŽMENTU**

vježbe 2017/18

TEORIJA VJEROVATNOĆE

- 1. Proračun uslovne vjerovatnoće**
- 2. Proračun totalne vjerovatnoće**
- 3. Primjena Bajesove teoreme**

V2

Zadatak 1.

U kutiji se nalazi 50 proizvoda, od čega je 20% neispravnih. Kontrolor izvlači 5 proizvoda jedan za drugim (bez vraćanja). Kolika je vjerovatnoća da će ocjena kontrolora biti pozitivna (svi proizvodi u uzorku su ispravni)?

RJEŠENJE

- neka su događaji:
 - A- „izvučeni proizvodi su svi ispravni “- ostvaruje se ako su svi dolje navedeni događaji realizovani
 - A1= „prvi izvučeni je ispravan“, $P(A1)$ = vjerovatnoća da je prvi izvučeni ispravan (odnos ukupno ispravnih kroz ukupan broj predmeta)=
$$P(A1)=(50-50 \cdot 20\%)/50=40/50$$
 - A2= „drugi izvučeni je ispravan“, $P(A2)$ = vjerovatnoća da je drugi izvučeni ispravan (odnos preostalih ukupno ispravnih kroz ukupno preostali broj predmeta, ako je prvi izvučeni bio ispravan)=
$$P(A2|A1)=(40-1)/(50-1)=39/49$$
 - A3= „treći izvučeni je ispravan“ : $P(A3|A2 \cap A1)=(40-2)/(50-2)=38/48$
 - A4= „četvrt izvučeni je ispravan“ : $P(A4|A3 \cap A2 \cap A1)=37/47$
 - A5= „peti izvučeni je ispravan“ : $P(A5|A4 \cap A3 \cap A2 \cap A1)=36/46$
- $$P(A)=P(A1) \cdot P(A2|A1) \cdot P(A3|A2 \cap A1) \cdot P(A4|A3 \cap A2 \cap A1) \cdot P(A5|A4 \cap A3 \cap A2 \cap A1)=40/50 \cdot 39/49 \cdot 38/48 \cdot 37/47 \cdot 36/46=0,31$$

Zadatak 2.

Kontrolom uzoraka betonskih kocki sa nekog gradilišta utvrđeno je da 20% ispitivanih uzoraka nije imalo zadovoljavajuću čvrstoću. Takođe je ustanovljeno da je čak 70% od tih uzoraka imalo površinske defekte.

- a) Kolika je vjerovatnoća da se u ukupnom broju uzoraka nalaze uzorci koji nijesu zadovoljili čvrstoću, a imaju površinske defekte?
b) Kolika je vjerovatnoca da ispitivani uzorci imaju nezadovoljavajuću čvrstoću ili površinski defekt, ako je ustanovljeno da 0,15 od svih uzoraka imaju površinske defekte?

RJEŠENJE

- a) neka je događaj A „ nezadovoljavajuća čvrstoća uzorka“, $P(A)=0,20$
- događaj B; „ Uzorak sa površinskim defektom“., pri cemu je poznato da je
 $P(B|A)= 0,70$
 - događaj C: „ nezadovoljavajuca cvrstoca i povrsinski defekt uzorka“, $C=A\cap B=AB$
 - po formuli uslovne vjerovatnoce je:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ odnosno } P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)=0,7\cdot 0,2=0,14$$

- b) neka je događaj A „ nezadovoljavajuća čvrstoća uzorka“, $P(A)=0,20$
- događaj B; „ Uzorak sa površinskim defektom“., pri cemu je poznato da je $P(B)=0,15$
 - događaj D: „ nezadovoljavajuca cvrstoca ili povrsinski defekt uzorka“, $C=A\cup B$
 - po formuli za vjerovatnoću zbira slučajnih događaja je:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,2+0,15-0,14=0,31$$

Zadatak 3.

U dva građevinska pogona izrađuju se prefabrikovani elementi. Kontrolama je utvrđeno da je procenat elemenata koji imaju grešku u prvom 5%, a u drugom 3%. Na gradilište se dovoze iste količine proizvoda iz oba pogona.

a) Ako se slučajno bira proizvod i utvrdi da je sa greškom, kolika je vjerovatnoća da je proizvod iz prvog pogona?

b) Kolika je vjerovatnoća da se u proizvoljnoj količini q koja se uzme na gradilištu nađe proizvod sa greškom?

RJEŠENJE

- događaj H_1 „izabrani proizvod je iz prvog pogona“, a $P(H_1)=1/2$, jer ih isti broj stize na gradiliste iz oba pogona
- događaj H_2 „izabrani proizvod je iz drugog pogona“, a $P(H_2)=1/2$
- $H_i \cap H_j = \emptyset$, za $i, j, i, j=1, 2$, $S=H_1 \cup H_2$
- događaj A : „izabran je proizvod sa greskom“, pri čemu je poznato: $P(A|H_1)=5\%=5/100$ i $P(A|H_2)=3\%=3/100$

a) naci uslovnu vjerovatnocu da je proizvod iz prvog pogona, ako je izabran proizvod sa greskom $P(H_1|A)=?$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{\sum_{k=1}^2 P(H_k) \cdot P(A|H_k)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{100}} = \frac{5}{8} = 0,625$$

b) traži se određivanje ukupne vjerovatnoće pojave događaja A

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{100} = 0,04$$

Zadatak 4.

Na izvođenju zemljanih radova angažovan je jedan buldozer, jedan utovarivači jedan kamion. mašine mogu otkazati nezavisno jedna od druge. Ako je vjerovatnoća rada bez zastoja za svaku od mašina različita iznosi b , u , k :

- a) naći vjerovatnoću da ovaj sistem mašina radi bez zastoja (odnosno naći pouzdanost ovog sistema)
b) ako se usvoje dva kamiona umjesto jednog, sa istom vjerovatnoćom rada bez zastoja, naći kolika je pouzdanost takvog sistema.

RJEŠENJE

- događaj A: "nije došlo do zastoja sistema" =, nije došlo do zastoja rada buldozera, ni utovarivača, ni kamiona", odnosno, $A = B \cap C \cap D$
- događaj B „ rad bez zastoja buldozera“, a $P(B) = b$
- događaj C „ rad bez zastoja utovarivača“, a $P(C) = u$
- a) događaj D „ rad bez zastoja kamiona“, a $P(D) = k$
- kako su B, C, D nezavisni događaji, to je vjerovatnoća njihovog proizvoda jednaka proizvodu njihove vjerovatnoće, pa je: $P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = b \cdot u \cdot k$
- b) događaj D1 „ rad bez zastoja 1. kamiona“, a $P(D1) = k$
- događaj D2 „ rad bez zastoja 2. kamiona“, a $P(D2) = k$
- događaj D „ rad bez zastoja kamiona“ =, rad bez zastoja makar jednog kamiona“, =događaj suprotan događaju „oba kamiona pokvarena“odnosno $D = (D1 \cap D2)^c$
- vjerovatnoća da je jedan kamion pokvaren je : $1-k$, a da su oba pokvarena je $(1-k)^2$
- vjerovatnoća komplementa događaja da su oba kamiona pokvarena je $1-(1-k)^2$
- događaj A: "nije došlo do zastoja sistema" =, nije došlo do zastoja rada buldozera, ni utovarivača, ni kamiona", odnosno, $A = B \cap C \cap D$

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = b \cdot u \cdot (1 - (1-k)^2)$$

Literatura

- Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Privredni pregled, Beo
- Vukadinović, S.: Zbirka rešenih zadataka iz teorije verovatnoće, Privredni pregled, Beograd, 1983
- Bruckler, F.M: Pierre de Fermat; Osječki matematički list 5(2005), 37–42
- <http://www.e-statistika.rs>
- Čuljak, V: Vjerojatnost i statistika, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011, https://portal.uniri.hr/system/resources/docs/000/004/082/original/Skripta_Vera_%C4%8Culjak.pdf?1413283708
- Tomič, V.: Elementi verovatnoće u srednjoj školi, (master rad), <http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/matematika/VojinTomic.pdf>